数形结合思想在高中数学教学中的应用探讨

游建国

四川省武胜烈面中学校 四川 武胜 638404

摘要：“数”与“形”是构成数学知识的两个核心表现形式，二者之间并非是割裂的状态，而是相辅相成的关系。而数形结合思想则是关于“数”与“形”之间有效转换的一种思想，强调突破僵化、单一的数学知识呈现方式，可以灵活运用恰当知识呈现方式来简化整个问题分析与求解过程，降低学生学习难度。本文立足高中数学教学现状，对数形结合思想的应用价值与策略进行了深入探讨，旨在培养学生运用数形结合思想分析及求解数学问题的能力。

关键词：高中数学；数形结合思想；应用

DOI：10.12277/j.issn.1672-7924.2021.11.0445

数学是一门以数量关系与空间图像知识研究重点的课程，“数”与“形”基本上构成了完整的数学知识体系，同时数学课程知识的抽象与繁杂等特征非常突出，使得高中生在理解过程中容易产生枯燥、乏味的情绪，并且非常容易陷入解题困境。造成这种情况的根本原因是没有在教学之初使高中生对数学知识及问题的本质形成深刻认知，分析问题中存在严重的思维定势情况，如碰到解题就考虑如何套用解题公式或模板，却不懂得运用有效思维活动来找寻问题求解突破口及思路。而在数形结合思想指引下，可以有效增强学生思维的灵便性，让他们可以通过灵活进行“数”与“形”的结合、转换等来降低问题分析难度。

一、高中数学教学中数形结合思想的应用价值

数形结合思想是关于“数”与“形”相关性研究的一种重要数学思想，本质上强调了“数”与“形”之间的等效互换的价值与功效。通过灵活地运用“数”与“形”，可以在“以形助数”、“以数助形”以及“数形结合”的过程中对所涉及到数学知识的真正含义以及数学问题的本质内涵形成深刻认知。通过在数学教学中结合一些典型的数学例题或者关键的数学知识点，将数形结合思想的具体应用思路及方式方法和注意事项等方面知识传授给高中生，可以逐步增强学生对“数”与“形”二者相关性的认识，让他们可以在求解数学问题中发散思维，强化“数”与“形”二者的相互转化以及结合运用来共同辅助高中生快速解决数学问题。此外，在数形结合的思维引导下，学生会在头脑中构建更为完善的数学知识体系，保证他们对不同数学知识点彼此之间内在相关性及联系性等形成深刻认知，最终可以提高高中生学习数学知识效果，促进数学解题能力发展。

二、高中数学教学中数形结合思想的应用策略

2.1 以数化形，增强知识的形象化

“数”与“形”均是数学知识呈现的两种重要形式。相较于“形”，“数”的抽象性与繁杂性特征更为突出，而“形”则具有更为显著的形象性与生动性，可以将许多数学属性进行直观地表达及呈现，对辅助高中生求解数学问题具有决定性作用。在指导高中生分析数学难点知识或关典型数学问题中，可以将其中包含的“数”与“形”方面内容挖掘出来，并借助化“数”为“形”的方式来为学生提供更为直观的一种知识呈现方式。在此基础上，可以针对“形”方面数学问题调用有关数学知识来进行快速求解。或者说，在以数化形思路下，可以将抽象的数字问题转化成图形类的数学问题进行求解，这时候可以将数字问题转化成平面几何类、立体几何类或解析几何类的图像问题进行快速求解。而在这种“以数化形”的思路下，可需要首先指导学生认真挖掘及分析数学问题中给出的已知条件，再结合已知目标来对它们彼此内在联系和关系进行确定，最后调用图形方面的知识，运用恰当计算方法与公式来对问题进行快速求解。

例 1：现有 A、B 两个集合，其中 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x<a\}$，$A\in B$。假定集合，试求集合 B 中参数 a 的取值范围？

解析：本题考查的是学生对集合概念及集合中相关符号含义等知识的理解与运用能力。整个题干信息比较少，但是却都是由“数”的形式呈现出来。如果直接套用集合关系方面公式进行推导，那么整个解题过程较为复杂，并且学生非常容易在求解问题中出现出错的情况。而如果可以指导高中生灵活应用数形结合思想，借助“以数化形”的思路来分析问题，那么可以通过结合题干信息来绘制数轴图的方式来辅助高中生快速找到数学问题求解的突破口所在。

解：基于题干条件可以绘制图 1 所示的数轴图，之后可以通过对数轴图进行剖析来直观地得到如下结论：为了保证集合 A ∈集合 B，那么可知此时参数 a 必然满足 a ＞ 2 这一个条件。然后令 a=2，此时结合图 1 展示的图式可以相应地得到如下结论：在 a=2 时，$B=\{x|x<2\}$，这时候恰好满足集合 A ∈集合 B。如此一来，就可以在以数化形的过程中辅助学生快速找到求解问题的突破口。

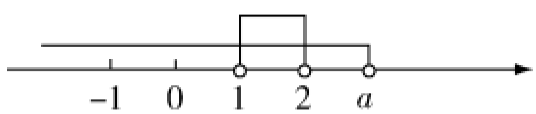

图 1

2.2 以形化数，降低知识理解难度

图形类的问题也是高中数学学习的重点，涵盖了平面图形、立体图形、解析几何等众多方面知识，但是仅仅依靠观察的方式观看那些复杂图形是远远不够的。因为单纯依靠观察图形无法对其中涉及到的具体信息进行呈现，如量化关系、比例关系等等这就决定了高中生在求解图形相关的数学问题中不能够只局限于图形信息的使用，同样依赖于结合一些关于“数”的知识来对其中的各种数学问题进行求解，尤其是要在数学教学中重点解决高中生当下普遍存在的数学知识单一化调用问题，无法在头脑中强化“数”与“形”之间的联系，进而在求解图形类数学问题中无法快速确定其中可供解题的量化关系，影响了解题的准确度与效率。因此，在指导学生学习图形类的数学知识以及对图形类数学问题进行分析过程中，可以有计划地帮助他们理解与掌握“以形化数”这一解题思想，即在对复杂数学图形问题进行分析中可以对其中包含的量化关系等关于“数”的知识进行挖掘，必要的时候可以通过极坐标、坐标系等辅助工具构建及利用来将复杂图形进行直观化处理。针对该种类型的数学问题，求解的根本思路是紧密结合数

学图形，对其中能够展现出来的几何知识与“数”的关系进行确定，配合图形方面概念、性质以及定理等知识的运用支持，可以帮助高中生对相应图形类数学题进行求解中快速找到解题思路与突破口，同时也可以有效锻炼学生的发散性和联系性思维，大大提高了数学问题求解能力。

例 2：现有一个四棱锥 P=ABCD 如图 2 所示，已知四棱锥底面是一个平行四边形，并且∠ BAD=60°，AD=1/2AB，且 DP ⊥面 ABCD，试求证：（1）BD ⊥ PA；（2）假定 AD=PD，试求二面角 C-PB-A 的余弦值？

解析：本题是一道非常经典额解析几何问题，不仅考察了学生对二面角、四棱锥等相关图形定义的理解及掌握情况，同样对他们的空间思维能力、想象力等具有较高要求。在求解过程中，第一道问题求证的难度比较小。但是针对第（2）个小问题的求证，如果采取常规的正向解题及分析思路，那么就需要找出来待求二面角对应的平面角，之后再借助三角形问题求解的方式来进行计算求解。这样的求解过程会涉及到比较大的计算量，并且需要涉及到不少于 3 条数量的辅助线，求证过程复杂。此时如果可以指导学生在分析问题过程中转变求解的思路，创新运用“以形化数”理念，通过空间指标坐标系构建的方式调用向量方面的数学知识，那么就可以采用代数方面的方法来对本道解析几何问题进行快速求证，并且整个求证过程简便，难度比较小。

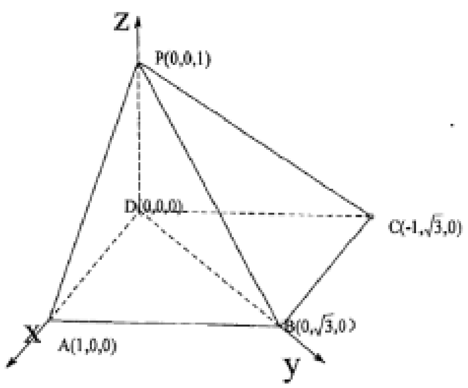

图 2

解：（1）假定 AD=1，有 AD=AB=2。在△ ABD 中，∠ BAD=60°，根据余弦定理可求得 BD= $\sqrt{3}$。由此可知，$AD^2+BD^2=AB^2$，可见其本身是一个职教三角形，有 BD ⊥ AD。又有 DP ⊥面 ABCD，可推导出 BD ⊥ PD，且 PD、AD 均为平面 PAD 之内两条表现为相互交叉的直线，有 BD ⊥面 PAD，故可以推导出 BD ⊥ PA。

（2）基于问题（1），可以推导得到∠ BDA=90°，故将 D 点当成坐标原点，选择 AD、BD 和 PD 所在直线分别对应直角坐标系的 x、y 和 z 轴后可以构建立体空间直角坐标系（图 3），并且可以相应地对 A、B、C、D 和 P 点的对应坐标进行求解，具体分别为（1, 0, 0），（0, $\sqrt{3}$, 0），（-1, $\sqrt{3}$, 0），（0, 0, 0）和（0, 0, 1）

在此基础上，可以确定面 BAP 法向量是 $\vec{n}=(x,y,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$，故有：

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，求解可得：x=1，y= $\sqrt{3}$ /3，对应的 $\vec{n}=$（1，$\sqrt{3}/3$，1）.

假定面 CBP 法向量是 $\vec{m}$=（x，ε，1），$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(0，-\sqrt{3}，1)$，故有：

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\mathrm{m}=0\end{cases}$，求解可得：x=0，y= $\sqrt{3}$ /3，对应的 $\vec{m}=$（0，$\sqrt{3}/3$，1）.

$$cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{\vec{n}\times\vec{m}}{|\vec{n},||\vec{m}|}.=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$。

由此可见，在求解那些难度比较大的图形类的数学问题中，为了可以辅助学生快速找到其中有关解题的关键信息与条件，要指导他们发散思维，灵活运用以数化形的方式来对图像类的数学问题进行量化、直观化表达，使学生可以快速确定求解问题的突破口及解题思路，这样可以大大提高复杂类图像方面数学问题解题准确度与效率。

2.3 形数结合，促进思维能力发展

数形结合思想是一种具有思维灵便性与能动性的有效数学思想，其中数与形之间的互相转换过程并非是单一的，尤其是在指导高中生在利用属性结合思想对所遇到的数学问题进行求解中，不能够单单采用单一的数与形转换方式，而是应该结合所遇到数学问题本身的难易程度，解题需求等来灵活地调用“以数化形”或者“以形化数”等多样化的互变方式方法，并且某个部分的转换可以进行多次、反复性互换，直至最终可以顺利完成解题为止。或者说，数形结合思想倡导学生发散自身的思维，懂得解题中能够随机应变的利用二者的相互转换来一步步简化所求解的问题。因此，在平时数学教学中可以结合函数、代数式、方程、不等式等众多方面的数学知识点，针对性为学生设计一些借助数形结合思想进行快速解题的练习题，要求学生在持续性训练过程中发展他们运用数形结合思想解决数学问题的能力。

例 3：求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$，其中 a 和 c，b 和 d 不同时保持相同。

解析：本道题是一道不等式证明题，题干信息比较短，并且没有给出具体的参数数值，对学生逻辑推理能力、抽象思维能力等具有较高要求。此时为了降低学生分析问题难度，可以指导他们融合数形结合思想，即在构建的直角坐标系当中设定点 0(0,0)，点 A（a,b）和点 B（c,d），之后相应地绘制出图 3。

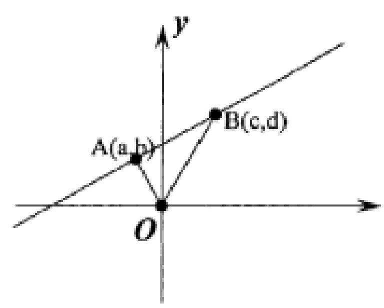

图 3

这样可以直观地得到线段 OA，OB 与 AB 分别对应了 $\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{c^2+d^2}$ 和 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$。在此基础上，可以直观地根据点 0，点 A 与点 B 三点是否共线来分别进行求证即可得到最终正确答案，大大提高了解题效率。

总之，数形结合思想是提高高中生数学问题解决能力的一种有效数学思想。在数学教学中可以结合具体教学内容，灵活设计一些典型的练习题来指导学生学习及运用数形结合思想进行分析问题，并且在他们“形”和“数”相互转换和有效融合的基础上降低分析问题难度，助力学生快速提升自身的数学解题能力。

参考文献

[1] 张彦平 . 信息技术背景下高中数学数形结合教学探究 [J]. 科学咨询 ,2020,19(1):114.